ANALIZA FUNKCJONALNA
LISTA 4

1. Uzasadnić, że domknięta popdrzestrzeń przestrzeni Banacha jest przestrzenią Banacha. Podprzestrzeń liniowa Y przestrzeni Banacha X jest *domknięta*, jeżeli dla każdego ciągu (y_n) elementów z Y, takiego, że $\lim_{n\to\infty} \|y_n - x\| \to 0$ zachodzi, że $x \in Y$.

2. Podać przykład bazy Hamela (bazy algebraicznej) w przestrzeni c_{00} (jest to nieskończenie wymiarowa przestrzeń unormowana, która nie jest przestrzenią Banacha).

3. Nieskończenie wymiarowe przestrzenie Banacha nie posiadają przeliczalnej bazy Hamela. Na przykładzie jednej z przestrzeni $c_0, c, l^p, C[0,1]$ pokazać, że tak faktycznie jest, konstruując nieprzeliczalny zbiór wektorów LN.

4. Czy przestrzenie c_0, c, l^p mają bazy Schaudera? Jeśli tak, wyznaczyć naturalne przykłady takich baz.

5. Niech $X = BUC(\mathbb{R})$ będzie przestrzenią funkcji ograniczonych i jednostajnie ciągłych na $\mathbb{R}$ z normą supremum. Pokazać, że ciąg operatorów

$$(T_n f)(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$$

jest zbieżny do operatora identycznościowego I w sensie mocnym, tzn.

$$\lim_{n\to\infty} \| T_n f - f \| = 0$$

dla dowolnego $f \in X$.

6. Pokazać, że operator z poprzedniego zadania nie jest zbieżny w normie operatorowej (czyli jednostajnie) do I, tzn. $\lim_{n\to\infty} \| T_n - I \| \neq 0$ (Wsk. można np. rozważyć ciąg $f_n = \sin(nx)$ i obliczyc $T_n(f_n)$).

7. Pokazać, że w przestrzeni unitarnej H (w szczególności, w przestrzeni Hilberta) zachodzi *twierdzenie Pitagorasa*:

$$\| x \|^2 + \| y \|^2 = \| x + y \|^2$$

dla $x, y \in H$, takich że $x \perp y$.

8. Pokazać, że w przestrzeni unitarnej H (w szczególności, w przestrzeni Hilberta) zachodzi *tożsamość równoległoboku*

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2 \| x \|^2 + 2 \| y \|^2$$

dla dowolnych $x, y \in H$.

9. Wykazać, że przestrzenie Banacha c_0, c, l^∞ nie są przestrzeniami Hilberta, znajdując ciągi, które nie spełniają tożsamości równoległoboku.

10. Pokazać, że iloczyn skalarny jest ciągły, tzn. jeżeli $x_n \to x$ oraz $y_n \to y$, to $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$.

11. W rzeczywistej przestrzeni Hilberta $L^2[0,1]$ znaleźć najlepszą aproksymację funkcji $f(x) = \sin(\pi x)$ wielomianem stopnia dwa.

12. Podać przykład przestrzeni Banacha, w której nie zachodzi twierdzenie o zbiorze wypukłym (tw. o najlepszej aproksymacji).

13. Pokazać, że jeżeli M jest podzbiorem przestrzeni Hilberta H, to $(M^\perp)^\perp$ jest *domkniętą podprzestrzenią liniową rozpiętą przez* M, tzn. jest domknięciem zbioru $\mathrm{Lin}(M)$ wszystkich kombinacji liniowych wektorów ze zbioru M.

14. Pokazać, że zbiór funkcji postaci

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

jest układem ortonormalnym w zespolonej przestrzeni Hilberta $L^2[0, 2\pi]$.

15. Pokazać, że zbiór funkcji

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

jest układem ortonormalnym w rzeczywistej przestrzeni Hilberta $L^2[0, 2\pi]$.

R. Lenczewski